

Måling av gravitasjonskonstanten

Abeera Akbar, Jakob Gerhard Martinussen & Ingeborg Ullaland

Oktober 2014

Sammendrag

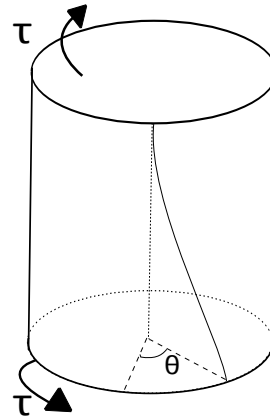
Gravitasjonskonstantens verdi, som anvendes i Newtons universelle gravitasjonslov, kan beregnes ved å foreta følsom måling av gravitasjonsvekselsvirkningene mellom to masser. Denne svake kraften ble i eksperimentet målt ved å plassere masser i en torsjonspendel og måle svingeperioden til de dempede harmoniske svingningene gravitasjonskreftene påfører. Den korrigerte gravitasjonskonstanten ble målt til å være $(4.98 \pm 0.20) \cdot 10^{-11} \text{Nm}^2\text{kg}^{-2}$. Dette avviket på 25% fra kjent verdi for gravitasjonskonstanten [1] skyldes feil i apparatur, utførelse og ytre forstyrrelser.

1 Innledning

Den universelle gravitasjonloven, som formulerer tiltrekningskraften mellom to masser, ble presentert av Isaac Newton i 1687[1]. Loven beskriver gravitasjonsvekselvirkningen som en kraft proporsjonal med produktet av massene, og omvendt proporsjonal med tyngdepunktavstanden mellom massene. Konstanten i formuleringen kalles gravitasjonskonstanten og ble gjennom eksperiment målt av Hendry Cavendish i 1798[2], som har fått eksperimentet oppkalt etter seg. Per i dag forenkler teknisk oppdatert apparatur forsøksprosedyren, men fysikkprinsippene bak eksperimentet er fortsatt de samme.

I denne rapporten beskrives hvordan man med Cavendish-eksperimentet kan måle gravitasjonskreftene mellom blykuler ved å bruke torsjonspendel til å undersøke dreiemomentet påført av gravitasjonsvekselsvirkningene. Ved måling av svingeutslaget til de dempede harmoniske svingningene påført av gravitasjonskraft, kan man implisitt få et uttrykk for dette dreiemomentet. Forsøket utføres med moderne apparatur.

F_g er proporsjonal med massene, og siden blykule-nes masse er relativ liten, er det nødvendig med særdeles følsomt apparatur. Ved å bruke en torsjonsvekt med myk torsjonstråd, kan ønsket følsomhet oppnås. Torsjonsvekten måler dreiemomentet, τ , staven utsettes for grunnet gravitasjonsvekselsvirkninger mellom massene. Da torsjonstrådens lengde er mye større enn vinkelutslaget (torsjonsvinkelen), θ , vil τ være proporsjonal med vinkelutslaget og torsjonstivheten, D , illustrert i figur 1.



Figur 1: Torsjon av stav som resultat av dreiemoment.

2 Teori og metode

Gravitasjonskraften, F_g , mellom to legemer med masse m_1 og m_2 , med avstand b mellom deres respektive tyngdemidtpunkt, er gitt ved Newtons universelle gravitasjonslov[3]

$$F_g = G \frac{m_1 m_2}{b^2}. \quad (1)$$

G uttrykkes dermed ved

$$G = F_g \frac{b^2}{m_1 m_2}. \quad (2)$$

Dreiemomentet er dermed gitt ved

$$\tau = D\theta. \quad (3)$$

Kraften som forårsaker dreiemomentet er gitt ved

$$F = \frac{\tau}{r}, \quad (4)$$

hvor r er kraftens arm m.h.p. rotasjonsaksen til torsjonspendelen. (3) innsatt i (4) gir

$$\frac{S}{L} = 2(\theta_1 + \theta_2). \quad (11)$$

Ligning (11) innsatt i (8) gir et uttrykk for kraften

$$F = \frac{D}{8r} \cdot \frac{S}{L}, \quad (12)$$

hvor valg av stor L vil gi en bedre tilnærming til vinkelutslaget.

Torsjonstivheten kan bestemmes ved å se på vinkelhastigheten til pendelsvingningen. Ettersom torsjonspendelen utsettes for nytt dreiemoment, forskyves likevektsposisjonen, slik at pendelen svinger dempet harmonisk rundt denne. Sammenhengen mellom dreiemoment og vinkelhastighet er proporsjonal

$$\tau = I\ddot{\theta}, \quad (13)$$

hvor $I = 2mr^2$. Ettersom det er motkraften fra tråden på pendelen som undersøkes, vil dreiemomentet i ligning (3) skrives med negativt fortegn. Ligning (13) innsatt i negativ ligning (3) gir dermed

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0, \quad (14)$$

hvor $\omega^2 = \frac{D}{I}$. En løsning av ligning (14) er

$$\theta(t) = \theta_0 \sin \omega t = \theta_0 \sin \sqrt{\frac{D}{I}} t.$$

Gitt svingeperioden, $T = \frac{2\pi}{\omega}$, kan torsjonsstivheten uttrykkes ved

$$D = \frac{4\pi^2 I}{T^2}. \quad (15)$$

Den gjennomsnittlige svingeperioden vil være gitt ved

$$\bar{T} = \frac{T_1 + T_2}{2}. \quad (16)$$

Usikkerheten i T kan anslås som halvparten av differansen mellom de to svingperiodene i de to respektive måleseriene som blir foretatt, siden disse to skulle ideelt sett vært like. Dette gir et uttrykk for usikkerheten

$$T = \frac{|T_1 - T_2|}{2}. \quad (17)$$

Utrykket for gravitasjonskraften i ligning (12) innsatt i uttrykket for gravitasjonskonstanten, ligning (2), gir

$$G = \frac{D}{8r} \cdot \frac{S}{L} \cdot \frac{b^2}{mM}. \quad (18)$$

(15) innsatt i (18) gir

$$G = \pi^2 \frac{Sb^2 r}{T^2 LM}. \quad (19)$$

Denne sammenhengen forutsetter at massene ikke påvirkes av gravitasjonsvekselvirkninger med en arm fra andre objekter, og at det opereres med små vinkler.

Utrykket inneholder kun verdier som det er mulig å måle. Ved å anvende Gauss feilforplantningslov, kan det dermed finnes et uttrykk for den absolutte usikkerheten til den beregnede gravitasjonskonstanten, uttrykt i form av usikkerhetene til de respektive måleverdiene som foretas

$$\Delta G = G \left(\left(\frac{\Delta S}{S} \right)^2 + \left(2 \frac{\Delta b}{b} \right)^2 + \left(\frac{\Delta r}{r} \right)^2 + \left(2 \frac{\Delta T}{T} \right)^2 + \left(\frac{\Delta L}{L} \right)^2 + \left(\frac{\Delta M}{M} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (20)$$

Ligning (19) forutsetter et isolert system, hvor de små blykulene kun påvirkes av gravitasjonskraften fra den nærmeste store blykule. I realiteten må også gravitasjonskraften mellom den lille og den store blykule i lengst avstand betraktes. Denne feilen kan estimeres ved å se kraftuttrykket for gravitasjonen mellom disse parvise kulene

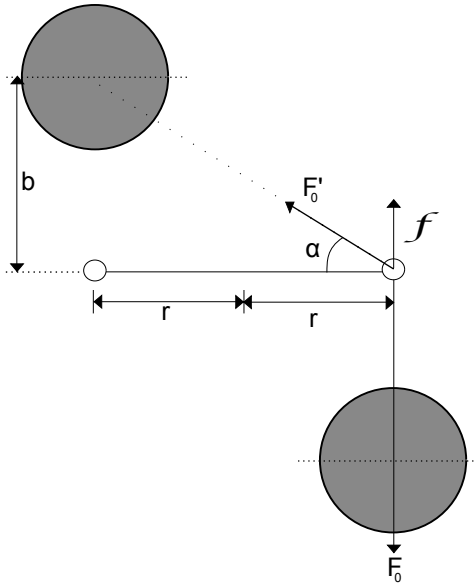
$$F'_0 = G \frac{mM}{4r^2 + b^2}. \quad (21)$$

Figur 3 viser den utslagsgivende komponenten av denne kraften, f , som peker motsatt av F_0 , og har en rettvisklet arm m.h.p. svingeaksen. Denne komponenten kan skrives som

$$f = F'_0 \cdot \sin \alpha = G \frac{mM}{b^2} \cdot \frac{b^3}{\sqrt{(b^2 + 4r^2)^3}} = F_0 \cdot \beta, \quad (22)$$

hvor $\beta = \frac{b^3}{\sqrt{(b^2 + 4r^2)^3}}$.

Uten å korrigere for denne systematiske utslagsgivende faktoren, vil man finne en for lav verdi av



Figur 3: Korreksjon av systematisk feil i Cavendish' eksperiment

gravitasjonskonstanten. Kraften vi har regnet ut blir dermed mer nøyaktig

$$F'_0 = F_0 - f = F_0(1 - \beta), \quad (23)$$

som gir et systematisk korrigert uttrykk for gravitasjonskonstanten

$$G_{korrr} = \frac{G}{1 - \beta}. \quad (24)$$

De nødvendige målingene for ligningen (19) ble foretatt i to måleserier. I måleserie 1 ble de store blykulene flyttet til posisjon 1 (se figur 2). Etter å ha avventet normalisering av forstyrrende svingninger i 2.5 minutter, ble laserrefleksjonens posisjon på målestokken (svingeutslaget) avlest hvert 30. sekund i 30 minutter. Dette muliggjorde kartlegging av likevektspunkt og svingeperiode.

I måleserie 2 ble prosedyren gjentatt etter å ha flyttet de store blykulene til posisjon 2. Målingene ble behandlet ved hjelp av statistisk regresjon. En regresjonsmodell basert på dempet oscillering ble brukt i følgende form

$$S(t) = S_0 + Ae^{-\alpha t} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \phi\right). \quad (25)$$

Statistisk feilanalyse av målingene gir et anslag av feilmarginene til S og T .

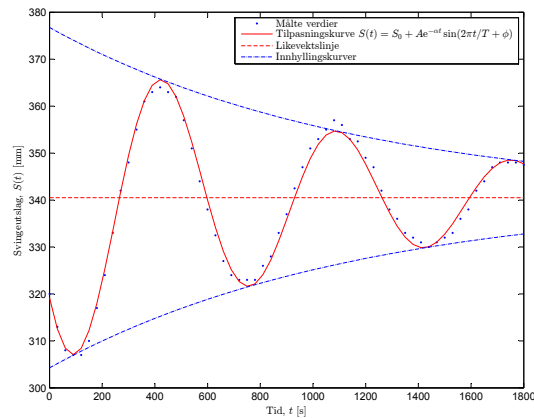
3 Resultater og måleverdier

3.1 Databehandling

Numerisk analyse av målingene med regresjonsmodellen fra ligning (25) gir verdiene oppført i tabell 3 og 4. Disse verdiene gir følgende verdi for gravitasjonskonstanten ved ligning (19)

$$G \approx 4.59 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}.$$

Et grafisk plott av svingeutslaget som en funksjon av tid er gitt i figur 4 og 5.



Figur 4: Måleserie #1: Grafen viser den dempede harmoniske svingingen som en funksjon av tid, om likevektsposisjonen - den helstrukne røde linjen. Enkeltmålingene er plottet som blå prikker.

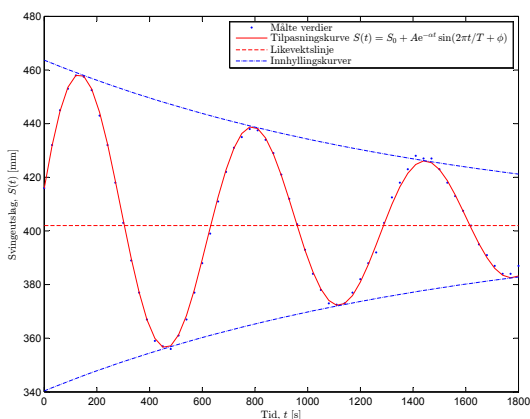
Tabell 3: Måleserie #1 databehandling

Måling	Verdi
S_1	340.5mm
T_1	664s
ΔS_1	0.2mm
ΔT_1	2s

Tabell 4: Måleserie #2 databehandling

Måling	Verdi
S_2	402.0mm
T_2	656s
ΔS_2	0.2mm
ΔT_2	1s

Det er regresjonsmodellen fra ligning (25) som gir funksjonene som er plottet med rød, helstruktet linje



Figur 5: Måleserie #2: Grafen viser en dempet harmonisk svinging tilsvarende figur 4, med en forskjøvet likevektsposisjon.

i figur 4 og 5. Den blåstiplede linjen indikerer systemet energitap gitt ved amplitudens demping, $Ae^{-\alpha t}$.

3.2 Usikkerhetsberegning

For å korrigere for systematisk feil, benyttes ligning (24)

$$G_{\text{korrr}} \approx 4.98 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}.$$

S beregnes ved ligning (9) til

$$S = 0.06150 \text{ m}.$$

Og usikkerheten i S beregnes ved ligning (10) til

$$\Delta S \approx 2.335 \cdot 10^{-4} \text{ m}.$$

Gjennomsnittlig svingeperiode er beregnet ved ligning (16) til

$$\bar{T} = 660 \text{ s}.$$

Usikkerheten i T anslås ved ligning (17) til

$$\Delta T = 4 \text{ s}.$$

Dette tyder på tilfeldige feil. Usikkerhet ved Gauss' feilforplantningslov fra ligning (20) er

$$\Delta G \approx 0.2 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}.$$

3.3 Endelig tallverdi

Vi antar at usikkerheten knyttet til G regnet ved ligning (19), er tilnærmet lik for den korrigerede verdien. Dette gir dermed den endelige beregnede tallverdien for gravitasjonskonstanten som

$$G_{\text{korrr}} = (4.98 \pm 0.20) \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$$

4 Diskusjon

Det beregnede resultatet for gravitasjonskonstanten avviker fra den kjente verdien for G , $6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$ [1], med ca. $2.4 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$. Med den systematiske korrigeringen reduseres differansen til ca. $1.7 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$. Dette tyder på gjennomgående feil i eksperimentet.

Cavendish-eksperimentet ble gjennomført av flere grupper samtidig med lignende apparatur og under tilsvarende omstendigheter. Alle gruppene fikk resultater som avviker fra kjent G i det omtrentlige intervallet $[-2.5, -1.8] \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$. Dette indikerer systematisk gjennomgående feil i apparaturen. Ved tilfeldige feil som den største kilden til avvik, ville det være forventet at alle gruppene ville få sluttresultater som lå tilfeldig spredt fra den kjente verdien for G .

Ettersom vår utregning av G forutsatte et isolert system, var ytre forstyrrelser en uheldig feilkilde. Fra figur 4 ser vi at enkeltmålingene av svingeutslaget avviker fra den lineære regresjonsmodellen. Avviket kan skyldes ytre påvirkninger ettersom torsjonspendelen var plassert nærme en dør med mye trafikk. Dette kan ha resultert i vibrasjoner og trekk som innvirket på svingeutslaget til torsjonspendelen.

Andre tilfeldige feil i eksperimentet er relatert til avlesningen av svingeutslaget. Dette inkluderer menneskelige feil relatert til øyemål, apparaturbegrensninger som målestokkens oppløsning og laserstrålens skarphet. Tidsintervallet mellom hver måling skulle vært på 30 sekunder, men her kan menneskelige unøyaktigheter ha forekommet. Feilene påvirker verdien for både T og S . Ligning (19) viser at resultatet for G er omvendt proporsjonalt med kvadratet av T , og feilestimering av T vil derfor innvirke betraktelig på det endelige resultatet.

I tillegg forutsetter bruken av ligning (19) at massene av blykulene er ekvivalente - noe tyngdemålingene viser de ikke er. Usikkerheten i de manuelle avstands- og tyngdemålingen påvirker også usikkerheten i G .

5 Konklusjon

Den endelige korrigerede verdien for gravitasjonskonstanten med feilestimat målte vi til $(4.98 \pm 0.20) \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$. Dette er et avvik på omtrent 25% fra kjent gravitasjonkonstant[1].

Til tross for at de innvirkende feilkildene førte til et avvikende resultat, ser vi at den beregnede gravitasjonskonstanten er av samme størrelsesorden som den aksepterte verdien.

Referanser

- [1] Helmut Ormestad og Øyvind Grøn/Store Norske Leksikon, *gravitasjon*, <https://snl.no/gravitasjon>, oktober(2014)
- [2] Christa Jungnickel og Russell McCormmach-McCormmach, *Cavendish*, American Philosophical Society, (1966).
- [3] Hugh D. Young og Roger A. Freedman. *University Physics with Modern Physics*. Pearson Education, Addison Wesley. 13. utgave, (2011).
- [4] Laboratoriumsheftet http://home.phys.ntnu.no/brukdef/undervisning/fy1001_lab/KompendiumMaster.pdf, oktober(2014).