

Statisk Magnetfelt: Biot-Savarts lov

Jakob Gerhard Martinussen^a, Alm Wilson^a

^aInstitutt for fysikk, Norges Teknisk-Naturvitenskapelige Universitet, N-7491 Trondheim, Norway.

Sammendrag

Biot-Savarts lov beskriver magnetfelt produsert av elektrisk strøm. Eksperimentet gikk ut på å måle verdier for magnetisk feltstyrke produsert av en strømførende enkeltspole, Helmholtzspoler i forskjellige innbyrdes avstander, samt en solenoide. Overenstemmelse mellom prediksjonene gitt ved Biot-Savarts lov og de eksperimentelle målingene blir deretter verifisert. Målingene resulterte i et gjennomsnittlig avvik på omtrent $\pm 3\%$ fra teoretiske verdier.

1. Innledning

I 1820 utførte franskmennene Jean-Baptiste Biot og Félix Savart en rekke eksperimenter for å kartlegge magnetiske felt rundt strømførende ledere. Dette resulterte i en lov som beskriver magnetisk feltstyrke i perpendikulære avstander fra en leder det går jevn strøm gjennom. Det aktuelle eksperimentet ønsker å utforske om Biot-Savarts lov er presis for en kort strømførende spole, Helmholtzspoler og en solenoide ved å måle de produserte magnetfeltene med en Halleffektprobe.

2. Teori

2.1. Biot-Savarts lov

Ladninger i bevegelse genererer magnetiske felt. Magnetfeltbidraget $d\vec{B}$ i et punkt P fra strømmen I i et infinitesimalt ledningselement $d\vec{s}$ er gitt ved Biot-Savarts lov

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}, \quad (1)$$

hvor μ_0 er magnetisk permeabilitet i tomt rom og punktet P har retningsvektoren \vec{r} , med enhetsvektoren $\hat{r} = \vec{r}/r$. Integrering over hele lederens lengde s gir et magnetisk felt tilsvarende

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_s \frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}. \quad (2)$$

2.2. Kort spole

En sirkulær trådspole med én vikling er vist i figur 1. Ved punktet P på aksens til spolen vil magnetfeltet ha én komponent parallelt med aksens, og én normalt på denne. Normalkomponenten vil, ved integrasjon over hele sløyfa, nulles ut. Dette fordi hver komponent vil da pares opp mot en komponent med lik størrelse men motsatt fortegn.

Et uttrykk for x -komponenten dB_x blir gitt ved å sette $r^2 = x^2 + \xi^2$ og $\sin \alpha = \xi/r$ inn i ligning (1) som gir

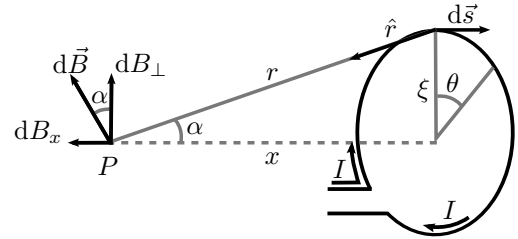


Figure 1: Kraftdiagram for enkel strømførende sirkulær sløyfe.

$$dB_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\xi d\theta}{x^2 + \xi^2} \frac{\xi}{\sqrt{x^2 + \xi^2}}. \quad (3)$$

Dette blir ved integrasjon over hele sløyfa, med $\int d\theta = 2\pi$, lik

$$B_x = \frac{\mu_0 I}{2\xi} \left(1 + \frac{x^2}{\xi^2}\right)^{-3/2}. \quad (4)$$

En kort spole kan sees på som en samling av N enkeltsløyfer uten utstrekning og med gjennomsnittsradiusen $R = \langle \xi \rangle$. Da er magnetfeltet i avstanden x fra sentrum langs aksens til spolen tilnærmet lik

$$B_x(x) \approx \frac{N\mu_0 I}{2R} \left(1 + \frac{x^2}{R^2}\right)^{-3/2}. \quad (5)$$

2.3. Helmholtzspoler

Såkalte Helmholtzspoler lages ved å koble til én spole til koaksialt med sentrum-til-sentrum avstand a fra den opprinnelige spolen. Det aksiale magnetfeltbidraget fra hver av dem er gitt ved ligning (5). Det totale feltet i avstanden x fra midtplanet mellom spolen blir på grunn av superposisjonsprinsippet dermed tilnærmet lik

$$B_x(x) \approx \frac{N\mu_0 I}{2R} \left[\left(1 + \frac{(x-a/2)^2}{R^2} \right)^{-3/2} + \left(1 + \frac{(x+a/2)^2}{R^2} \right)^{-3/2} \right] \quad (6)$$

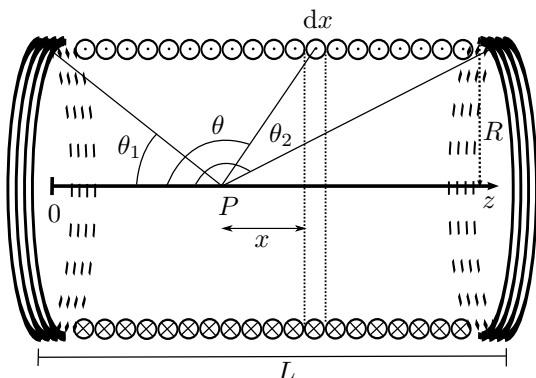
hvor utstrekningen av spolene er neglisjert. Derivasjon med hensyn på x , ved $x = 0$ og $a = R$, gir

$$dB/dx = d^2B/dx^2 = d^3B/dx^3 = 0, \quad (7)$$

som vil si at ved $a = R$ oppnås et tilnærmet homogent felt mellom spolene.

2.4. Solenoide

En solenoide er en sylindrisk formet spole med et høyt antall viklinger. Figur 2 viser et utsnitt av en solenoide, med de størrelsene som trengs for å komme frem til et uttrykk for magnetfeltet ved et punkt P langs aksen.



Figur 2: Utsnitt av solenoide.

En solenoide kan sees på som mange tynne sløyfer som er satt tett sammen til en sylinder. For å finne magnetfeltbidraget til hver av dem er det nyttig å definere strøm per lengdeenhet som $IN/L = In$, hvor n er antall viklinger per lengdeenhet. Dette gir bidraget fra en tynn strømsløyfe ved posisjon x lik $dI = Indx$. Dermed blir magnetfeltbidraget fra sløyfen lik

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2} \frac{R^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 In}{2} \frac{R^2 dx}{(R^2 + x^2)^{3/2}}. \quad (8)$$

Fra figur 2 ser vi geometrisk at $x = R/\tan\theta$ og derivasjon med hensyn på θ gir

$$dx = -R \frac{1}{\sin^3\theta} \sin\theta d\theta \quad (9)$$

hvor

$$\sin^3\theta = \frac{R^3}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \quad (10)$$

som gir

$$dx = -R \frac{(R^2 + x^2)^{3/2}}{R^3} \sin\theta d\theta \quad (11)$$

Dette satt inn i ligning (8) er

$$dB = -\frac{\mu_0 In}{2} \sin\theta d\theta \quad (12)$$

som ved integrasjon over grensene θ_2 til θ_1 gir

$$B(x) = -\frac{\mu_0 In}{2} \int_{\theta_2}^{\theta_1} \sin\theta d\theta \quad (13)$$

$$= \frac{\mu_0 In}{2} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

Hvor vinklene θ_1 og θ_2 er:

$$\theta_1 = \cos^{-1} \left(\frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) \quad (14)$$

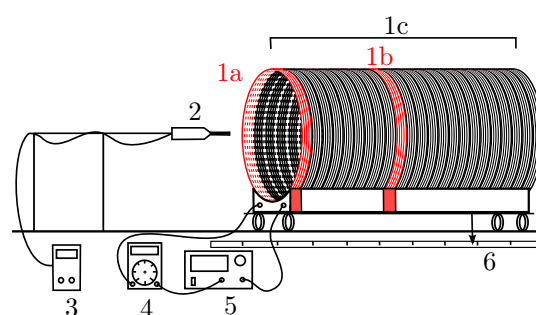
$$\theta_2 = \cos^{-1} \left(-\frac{L-z}{\sqrt{(L-z)^2 + R^2}} \right)$$

som utledes fra figur 2.

3. Eksperimentell metode

3.1. Generelt

Oppsettet for alle tre eksperimenter består av et gaussmeter koblet opp til en stasjonær Halleffektprobe, en vogn med rulleretning langs probens akse og spoler koblet opp mot et multimeter (4) og en kraftforsyning (5) som vist i figur 3. Det ble observert at magnetfeltene minker i styrke over tid, selv om alle andre parametere holdes konstant. Det ble foretatt en måleserie av dette feltstyrketapet for å identifisere dets omfang. Av denne grunn gjøres målingene over så kort tid som mulig for å redusere feilen.



Figur 3: Fremstilling av eksperimentelt oppsett. 1a) Kort spole, 1a) + 1b) Helmholtzspoler, 1c) solenoide, 2) Halleffektprobe 3) gaussmeter, 4) multimeter, 5) kraftforsyning, 6) meterstav.

Det prosentvise, eksperimentelle avviket fra teoretisk verdi beregnes på følgende vis:

$$\text{avvik} = \frac{\text{eksperimentell verdi} - \text{teoretisk verdi}}{\text{teoretisk verdi}} \cdot 100\%. \quad (15)$$

3.2. Kort spole

For denne delen av eksperimentet monteres en spole (1a) med indre radius $R = 7$ cm og antall viklinger $N = 368$ koaksialt med Halleffektproben (2). For å kartlegge magnetfeltet justeres avstanden fra proben til spolen trinnvis med avlesninger på gaussmeteret (3) for hver 1–3 cm på meterstokken (6) i intervallet $-20 \text{ cm} \leq x \leq 20 \text{ cm}$. Her er $x = 0$ satt ved sentrum til spolen langs aksen.

3.3. Helmholtzspoler

For neste del kobles det opp en ytterligere spole med samme dimensjoner (1b), koaksialt med den forrige spolen (1a). Disse danner da Helmholtzspoler med avstanden a fra sentrum i hver spole. Målinger av magnetfelt foregår på samme hvis som før, med x -verdier i samme intervall. Her velges $x = 0$ til å være midtpunktet mellom to punkter som har lik magnetfeltverdi. Måleserier blir nå utført for de tre forskjellige a -verdiene $a = 2R$, $a = R$ og $a = R/2$.

3.4. Solenoide

I siste del av eksperimentet erstattes Helmholtzspolene av en solenoide (1c), igjen koaksialt med proben. Solenoidens lengde er; $L = 39,5$ cm, dets radius er; $R = 5$ cm og har antall viklinger; $N = 368$. Samme fremgangsmåte følges også her, men med z -verdier $-10 \text{ cm} \leq z \leq 50 \text{ cm}$. Det kan observeres at ved $z = 0$ er den dobbelderiverte av ligning (13) med hensyn på z lik 0. Dette vil si at magnetfeltet øker mest ved begynnelsen av solenoiden. Denne egenskapen brukes til å estimere hvor $z = 0$ blir satt.

4. Resultater og diskusjon

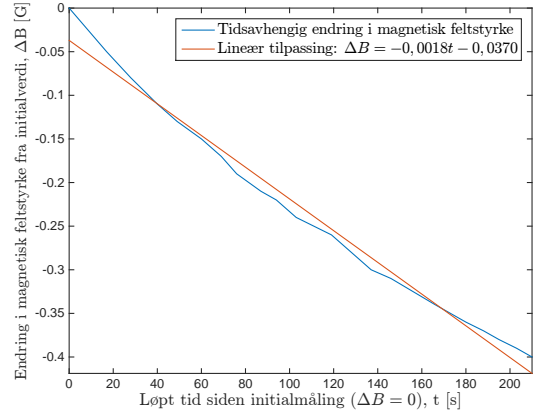
4.1. Generelt

Den påførte strømmen gjennom de magnetfeltproduserende spolene ble valgt til å ligge rundt 1 A. De spesifikke målte verdiene er oppgitt i tabell 1.

Tabell 1: Målt strøm gjennom spole

#	Spoletype	Strøm
1	Kort spole	0,98 A
2	Helmholtzspoler	1,00 A
3	Solenoide	0,99 A

For de fem foretatte måleseriene når ikke de eksperimentelle verdiene for den magnetiske feltstyrken opp til den teoretiske prediksjonen ved de punkter hvor feltstyrken er størst, det vil si; nærme spolene. Årsaken kan være en manglende sensibilitet i den brukte Hallproben og det medfølgende gaussmeteret. Det observerte 'tapet' av magnetisk feltstyrke som kan observeres i figur 4 tilsvarer et lineært tilnærmet tap på $-0,0018 \text{ G s}^{-1}$. Tapet er dog forholdsvis liten i forhold til de absolutte verdiene som ble målt og tiden som ble brukt for å ta én måleserie, men



Figur 4: Endring i målt magnetisk feltstyrke når alle parametere holdes konstant

dette er likevel en indikasjon på at det er feilkilder tilstede som ikke er eksplisitt identifisert.

Usikkerhetene i variablene benyttet i funksjon (5), (6) og (14) er anslått i tabell 2. Disse funksjonsuttrykkene er partiellderiverte med hensyn på de enkelte variablene med ikke-neglisjerbare feilanslag, i henhold til Gauss' feilforplantningslov. De resulterende funksjonsuttrykkene for feilforplantningen er gitt i appendikset. Dette gir et beregnet usikkerhetsintervall som er plottet med stiplet linje i resultatplottene.

Tabell 2: Usikkerhetsanslag

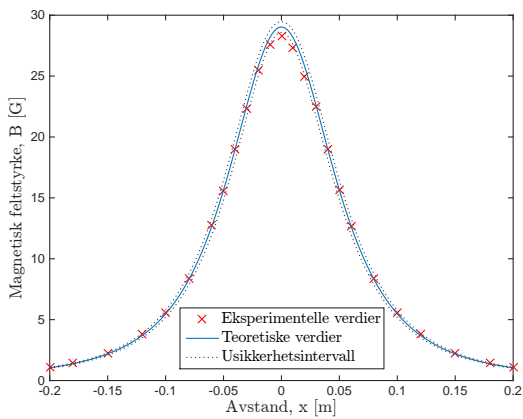
Variabelusikkerhet	Anslag
Δx	$\pm 2,5$ mm
Δz	$\pm 2,5$ mm
Δa	$\pm 2,5$ mm
ΔR	± 1 mm
ΔL	± 1 mm
ΔI	± 5 mA

4.2. Kort spole

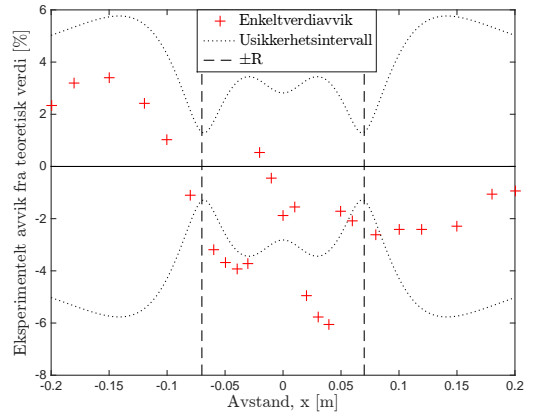
Den generelle trenden som teorien forutser gjenarter seg i de eksperimentelle verdiene i figur 5. Figur 6 viser at det relative avviket fra teoretisk verdi øker ved større avstand fra spolesentrum. Økningen i den relative feilen grunnes hovedsakelig her av mindre *absolutte* verdier for magnetfeltet. Det 0,07 G store avviket ved $x = -20$ cm tilsvarer et 7% avviket fra teoretisk verdi, mens det $-0,83$ G store avviket ved $x = 0$ cm tilsvarer kun et -3% avviket fra teoretisk verdi.

4.3. Helmholtzspoler

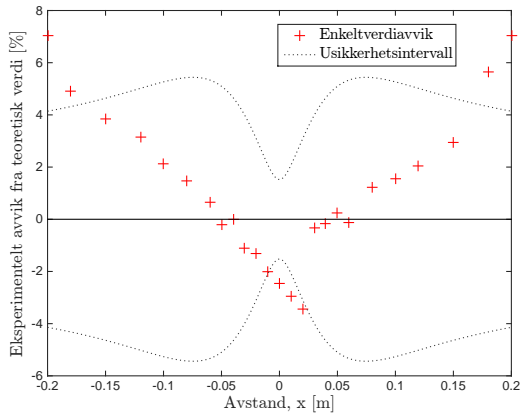
For Helmholtzspolene i avstand $a = 2R$ kan vi se i figur 7 en reduksjon i den magnetiske feltstyrken mellom de to spolene, mens for Helmholtzspolene i avstand $a = R/2$



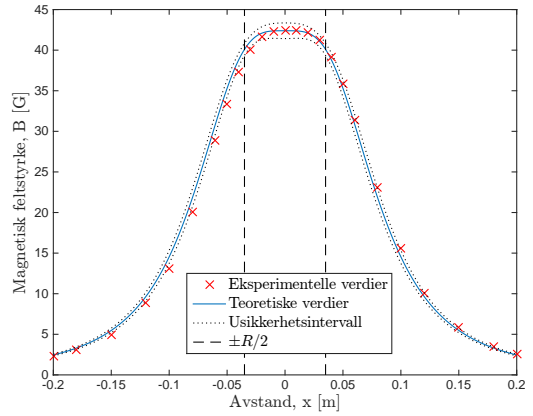
Figur 5: Magnetfelt forårsaket av en kort spole, hvor $x = 0$ tilsvarer spolens midtpunkt.



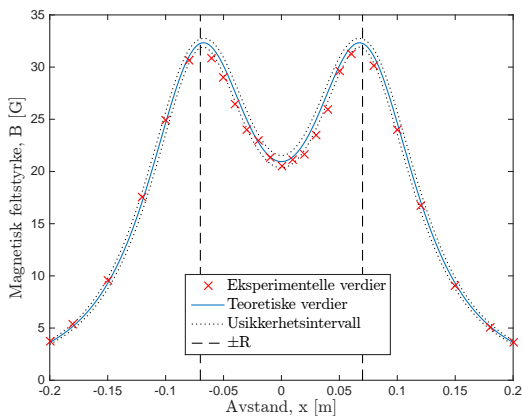
Figur 8: Prosentvis avvik fra teoretisk verdi for Helmholtzspolene i avstand $a = 2R$ fra hverandre.



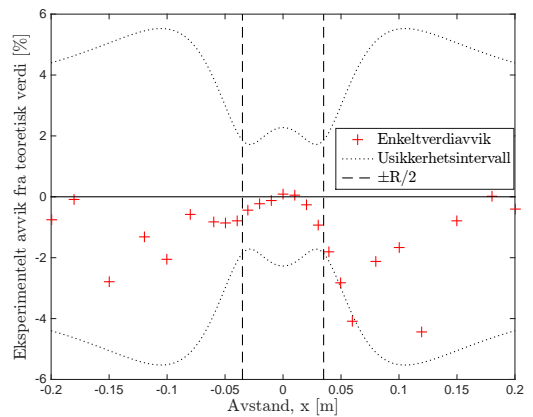
Figur 6: Prosentvis avvik fra teoretisk verdi for den korte spolen.



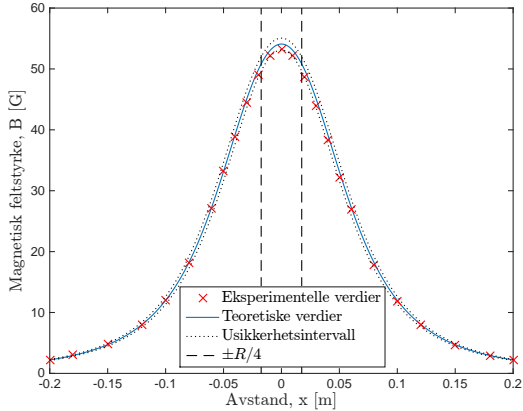
Figur 9: Magnetfelt forårsaket av to Helmholtzspoler med radius R i avstand R fra hverandre, hvor $x = 0$ er midpunktet mellom Helmholtzspolene.



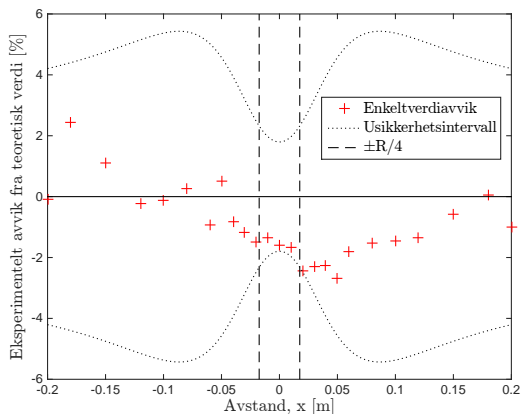
Figur 7: Magnetfelt forårsaket av to Helmholtzspoler med radius R i avstand $2R$ fra hverandre, hvor $x = 0$ er midpunktet mellom Helmholtzspolene.



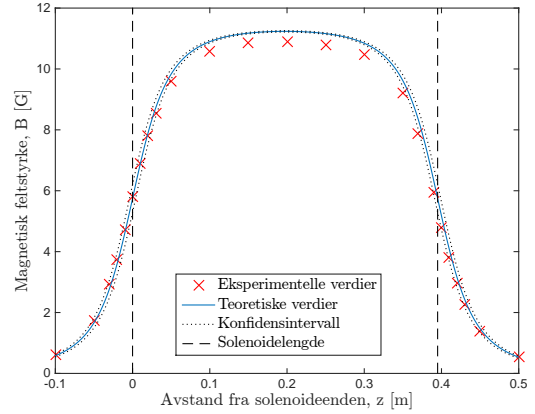
Figur 10: Prosentvis avvik fra teoretisk verdi for Helmholtzspolene i avstand $a = R$ fra hverandre.



Figur 11: Magnetfelt forårsaket av to Helmholtzspoler med radius R i avstand $a = R/2$ fra hverandre, hvor $x = 0$ er midpunktet mellom Helmholtzspolene.



Figur 12: Prosentvis avvik fra teoretisk verdi for Helmholtzspolene i avstand $a = R/2$ fra hverandre.



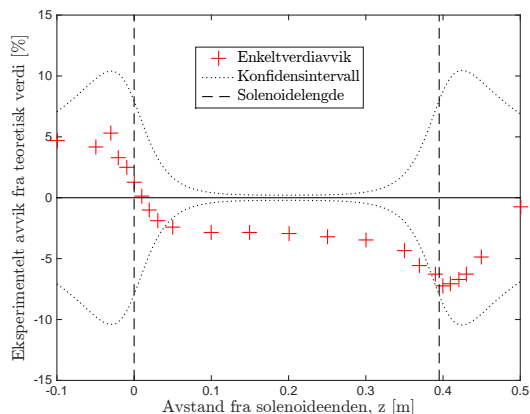
Figur 13: Magnetfelt forårsaket av strømførende solenoide, hvor $z = 0$ tilsvarer venstre ende av solenoiden.

ser vi i figur 11 det motsatte tilfellet. Det genererte magnetfeltet begynner her å ligne på magnetfeltet produsert av en tilsvarende enkelt spole med $2N$ viklinger. For begge disse oppsettene ligger det relative avviket fra teoretisk verdi relativt tilfeldig fordelt i området rundt $\pm 4\%$, noe som kan observeres i figur 8 og 12.

Av spesiell interesse er Helmholtzspoler satt opp i en avstand $a = R$ fra hverandre. Figur 9 viser et særdeles homogent magnetfelt mellom spolene som forutsett av ligning (7). Den teoretisk forutsette feltstyrken til det homogene feltet er 42,39 G, mens den eksperimentelle verdien er omlag 42,42 G, noe som tilsvarer en 0,07% feil. Det relativt lille avviket fra teoretisk verdi i målingene mellom spolene sees godt i figur 10. Innskrenkingen til usikkerhetsintervallet mellom disse spolene viser et magnetfelt med større utslagstoleranse for små endringer i de relevante variable. Det kan også påpekes at en horisontal translasjon av alle de eksperimentelle målepunktene 0,4 cm til venstre vil redusere den observerte usikkerheten i figur 10 til omlag en tredjedel. En slik feil skyldes trolig en menneskelig feil knyttet til den initielle posisjonen av Hallproben ved posisjonen som ble anslått til å være $x = 0$.

4.4. Solenoide

Figur 13 viser at solenoiden produserer et relativt svakt magnetfelt i forhold til de tidligere oppsettene, men fordelt over et større romlig område. Magnetfeltet er også relativt homogent innad solenoiden. Usikkerhetsintervallet, basert på tilfeldige feil, er ikke tilstrekkelig for å forklare det observerte avviket mellom teoretisk og eksperimentell verdi. Her har usikkerhet knyttet til translasjon av hallproben i aksial retning ikke like stor innvirkning som i foregående måleserier. Dette tyder på feil av systematisk natur, og mulige årsaker til disse er allerede diskutert i seksjon 4.1. En radiell feilforskyvning av Hallproben fra solenoidesentrumet kan også være en årsak til dette avviket.



Figur 14: Prosentvis avvik fra teoretisk verdi for solenoiden.

5. Konklusjon

De eksperimentelle verdiene for magnetisk felstryke viser tilfredsstillende overstemmelse med funksjonsuttrykkene for magnetisk feltstyrke utledet fra Biot-Savarts lov. Apparaturbegrensninger forklarer storparten av de observerbare avvikene. Det viser seg også at Helmholtzspoler i innbyrdes avstand tilsvarende deres radius produserer et svært homogent felt, noe som har anvendelser innen for eksempel vitenskapelig utstyr som har til hensikt å kansellere jordas magnetfelt.

- [1] Parsley, Robert J. *The Biot-Savart operator and electrodynamics on bounded subdomains of the three-sphere*. University of Pennsylvania. Addison Wesley www.wfu.edu/parslerj/research/dissertation.parsley.pdf
- [2] Laboratoriumsheftet [http://home.phys.ntnu.no/brukdef/undervisning/tfy4155_lab/orientering/ElectromagnetismMMXIV.pdf,mars\(2015\)](http://home.phys.ntnu.no/brukdef/undervisning/tfy4155_lab/orientering/ElectromagnetismMMXIV.pdf,mars(2015)).

Appendiks

5.1. Feilforplantning for kort spole

ΔB_1 er gitt ved gauss' feilforplantingslov som $\sqrt{(\frac{\partial B}{\partial I} \Delta I)^2 + (\frac{\partial B}{\partial R} \Delta R)^2 + (\frac{\partial B}{\partial x} \Delta x)^2}$, noe som gir

$$\Delta B_1 = \left((B_1 \frac{1}{I} \Delta I)^2 + (B_1 \frac{2x^2 - R^2}{R^3 + Rx^2} \Delta R)^2 + (B_1 \frac{3x}{2(R^2 + x^2)} \Delta x)^2 \right)^{1/2},$$

hvor B_1 er gitt ved ligning (5).

5.2. Feilforplantning for Helmholtzspoler

ΔB_2 er gitt ved gauss' feilforplantingslov $\sqrt{(\frac{\partial B}{\partial I} \Delta I)^2 + (\frac{\partial B}{\partial R} \Delta R)^2 + (\frac{\partial B}{\partial x} \Delta x)^2 + (\frac{\partial B}{\partial a} \Delta a)^2}$, noe som gir

$$\begin{aligned} \Delta B_2 = & \left(\left(B_2 \frac{1}{I} \Delta I \right)^2 + \left(\left(B_2 \left(3 - \frac{1}{R} \right) - \frac{3N\mu_0 I}{2R} \left[\left(1 + \frac{(x-a/2)^2}{R^2} \right)^{-5/2} + \right. \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left(1 + \frac{(x+a/2)^2}{R^2} \right)^{-5/2} \right] \right) \Delta R \right)^2 + \left(\frac{3N\mu_0 I}{2R^3} \left[\left(1 + \frac{(x-a/2)^2}{R^2} \right)^{-5/2} (x-a/2) + \right. \right. \\ & \left. \left. \left(1 + \frac{(x+a/2)^2}{R^2} \right)^{-5/2} (x+a/2) \right] \Delta x \right)^2 + \left(\left(\frac{3N\mu_0 I}{4R^3} \left[\left(1 + \frac{(x-a/2)^2}{R^2} \right)^{-5/2} (x-a/2) + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. \left(1 + \frac{(x+a/2)^2}{R^2} \right)^{-5/2} (x+a/2) \right] \Delta a \right)^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Her er B_2 gitt ved ligning (6).

5.3. Feilforplantning for solenoide

ΔB_3 er gitt ved gauss' feilforplantingslov som $\sqrt{(\frac{\partial B}{\partial I} \Delta I)^2 + (\frac{\partial B}{\partial z} \Delta z)^2 + (\frac{\partial B}{\partial R} \Delta R)^2 + (\frac{\partial B}{\partial L} \Delta L)^2}$, noe som gir

$$\begin{aligned} \Delta B_3 = & \left(\left(B_3 \frac{1}{I} \Delta I \right)^2 + \left(\frac{R^2 \mu_0 I n}{2} \left(\frac{1}{(z^2 + R^2)^{3/2}} - \frac{1}{((L-z)^2 + R^2)^{3/2}} \right) \Delta z \right)^2 + \right. \\ & \left. \left(\frac{R \mu_0 I n}{2} \left(\frac{z}{(z^2 + R^2)^{3/2}} + \frac{L-z}{((L-z)^2 + R^2)^{3/2}} \right) \Delta R \right)^2 + \right. \\ & \left. \left(\frac{\mu_0 I n}{2} \left(\frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}} + \frac{((L-z)^2 + R^2)^2 + (L-z)}{((L-z)^2 + R^2)^{5/2}} \right) \Delta L \right)^2 \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

hvor B_3 er gitt ved ligning (14).